

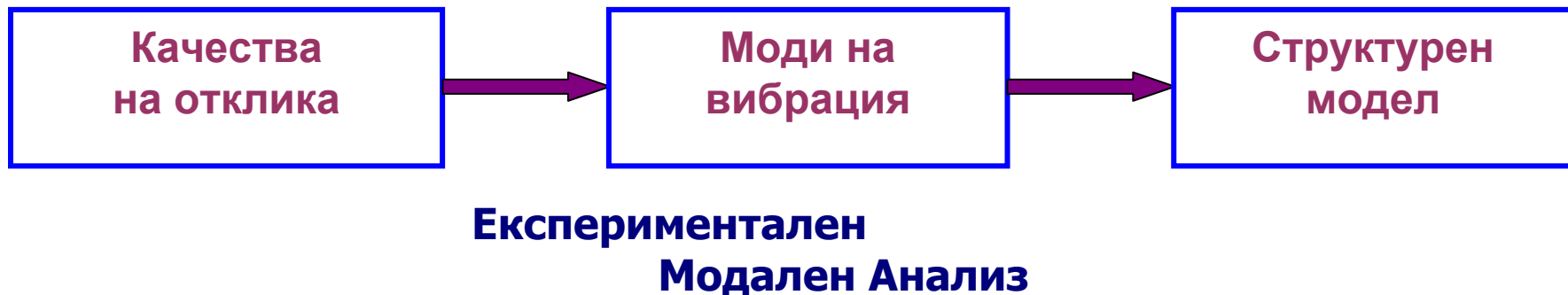


Модални изпитания

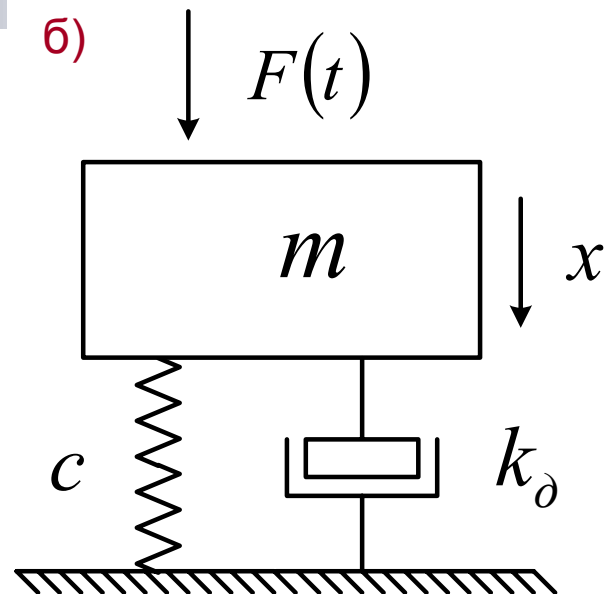
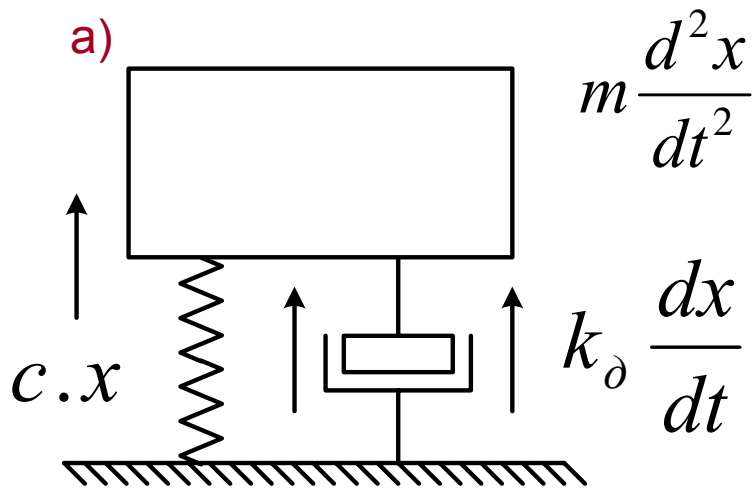
доц. д-р инж. Симеон Петков



Фиг. 1. Теоретичен подход за анализ на вибрация



Фиг. 2. Експериментален подход за анализ на вибрация



Фиг. 3. Динамични модели на система с една степен на свобода

а) кинематично смущение;

б) динамично смущение върху масата;

Уравнение за движение на маса в система с една степен на свобода

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_0 \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_0 \frac{dx}{dt} + cx = F(t)$$

Недемпфирана *SDOF* система

- Като установен, пространственият модел се състои от m и k .
- $F(t) = 0$ Уравнение на движение $m\ddot{x} + kx = 0$
- Опитното решение се подчинява на изискването, че: $(k - \omega^2 m) = 0$ —
- Модалният модел състоящ се от едно решение с естествена честота ω_0 се дава от: $(k/m)^{1/2}$
- След отчитане възбудането на формата: $F(t) = Fe^{j\omega t}$
- за решение на формата: $x(t) = xe^{j\omega t}$
- Сега уравнението на движение е: $(k - \omega^2 m)xe^{j\omega t} = Fe^{j\omega t}$
- Модел на отклика във формата на честотна функция на отклика:
- $\frac{x}{F} = \frac{1}{k - \omega^2 m} = H(f)$, податливост на системата

$$M(f) = \frac{\omega}{k - \omega^2 m}$$

$$I(f) = \frac{\omega^2}{k - \omega^2 m}$$

Вискозно демпфирана *SDOF* с-ма

- Уравнение на движение за свободно трептене: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

$$x(t) = xe^{pt} \quad (mp^2 + cp + k) = 0$$

$$p_{1/2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 4km}{2m}} = -\overline{\omega}_0 \xi \pm j\overline{\omega}_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

$\overline{\omega}_0 = (k/m)^{1/2}$ е недемпфирана естествена честота,

$\xi = c/c_0 = (c/2\sqrt{k/m})$ безразмерно отношение на демпфиране,
 c/c_0 критичното демпфиране,

- Модално решение на формата на модата:

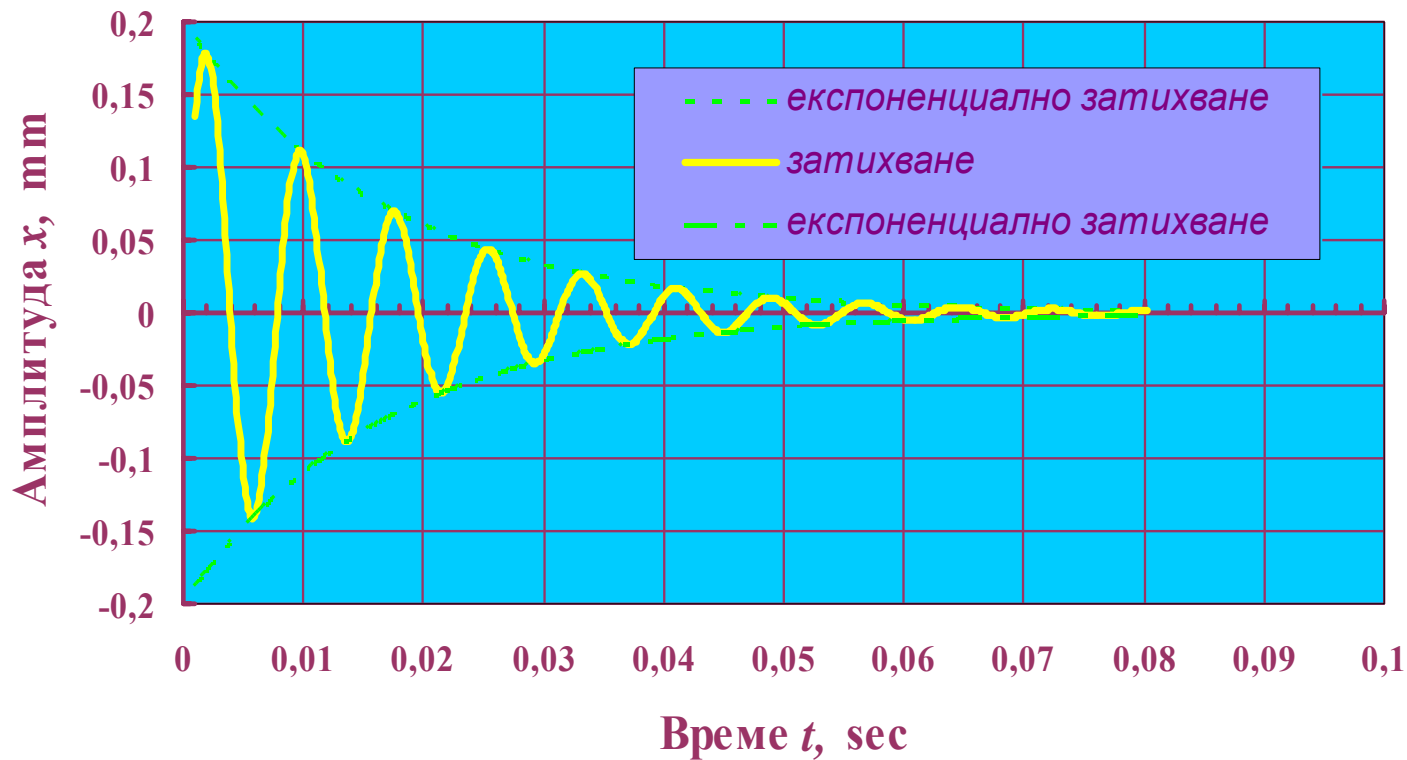
$$x(t) = x \cdot e^{-\overline{\omega}_0 \xi t} \cdot e^{j(\overline{\omega}_0 \sqrt{1 - \xi^2}) t} = x \cdot e^{-at} \cdot e^{j\omega'_0 t}$$

- Уравнение на движение: $(-\omega^2 m + j\omega c + k)xe^{j\omega t} = Fe^{j\omega t}$

- Податливост на честотната функция на отклика на формата:

$$H(f) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + j\omega c} \quad |H(f)| = \frac{|x|}{|F|} = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}}$$

$$\angle H(f) = \angle x - \angle F = \text{tg}^{-1}(-\omega c / (k - \omega^2 m)) = -\theta_H$$



Фиг. 4. Характеристика на свободно трептене на система с една степен на свобода

имагинерна, или частта на трептене; с честота $\omega'_0 = \left(\overline{\omega_0} \sqrt{1 - \xi^2} \right)$

реална, или частта на затихване (степен на демпфиране) $a \left(= \xi \overline{\omega_0} \right)$

Хистерезисно (структурно) демпфирана $SDOF$ система

- Уравнението за движение е: $(-\omega^2 m + k + jh)x e^{j\omega t} = F e^{j\omega t}$

- даващо $\frac{x}{F} = H(f) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + j(h)}$

$$H(f) = \frac{1/k}{(1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\eta)}$$

- където η е коефициентът на загубите от структурно (хистерезисно) демпфиране.

Алтернативни форми на честотната функция на отклика

$$\left(\frac{\text{сила}}{\text{преместване}} \right) : \text{„Динамична коравина”} \quad (N / m)$$

$$\left(\frac{\text{сила}}{\text{скорост}} \right) : \text{„Механичен импеданс”} \quad (N / ms^{-1})$$

$$\left(\frac{\text{сила}}{\text{ускорение}} \right) : \text{„Динамична маса”} \quad (N / ms^{-2})$$

Алтернативни форми на честотната функция на отклика

Таблица 1. Дефиниции на честотните функции на отклика

Параметър на отклика R	Стандартен R / F	Обратен F / R
Преместване	Податливост (Еластичност) Динамична податливост	Динамична коравина
Скорост	Мобилност	Механичен импеданс
Ускорение	Инертност Ускоряемост	Динамична маса

Графично изобразяване на данните на честотната функция на отклика

Трите най-обичайни форми на представяне са:

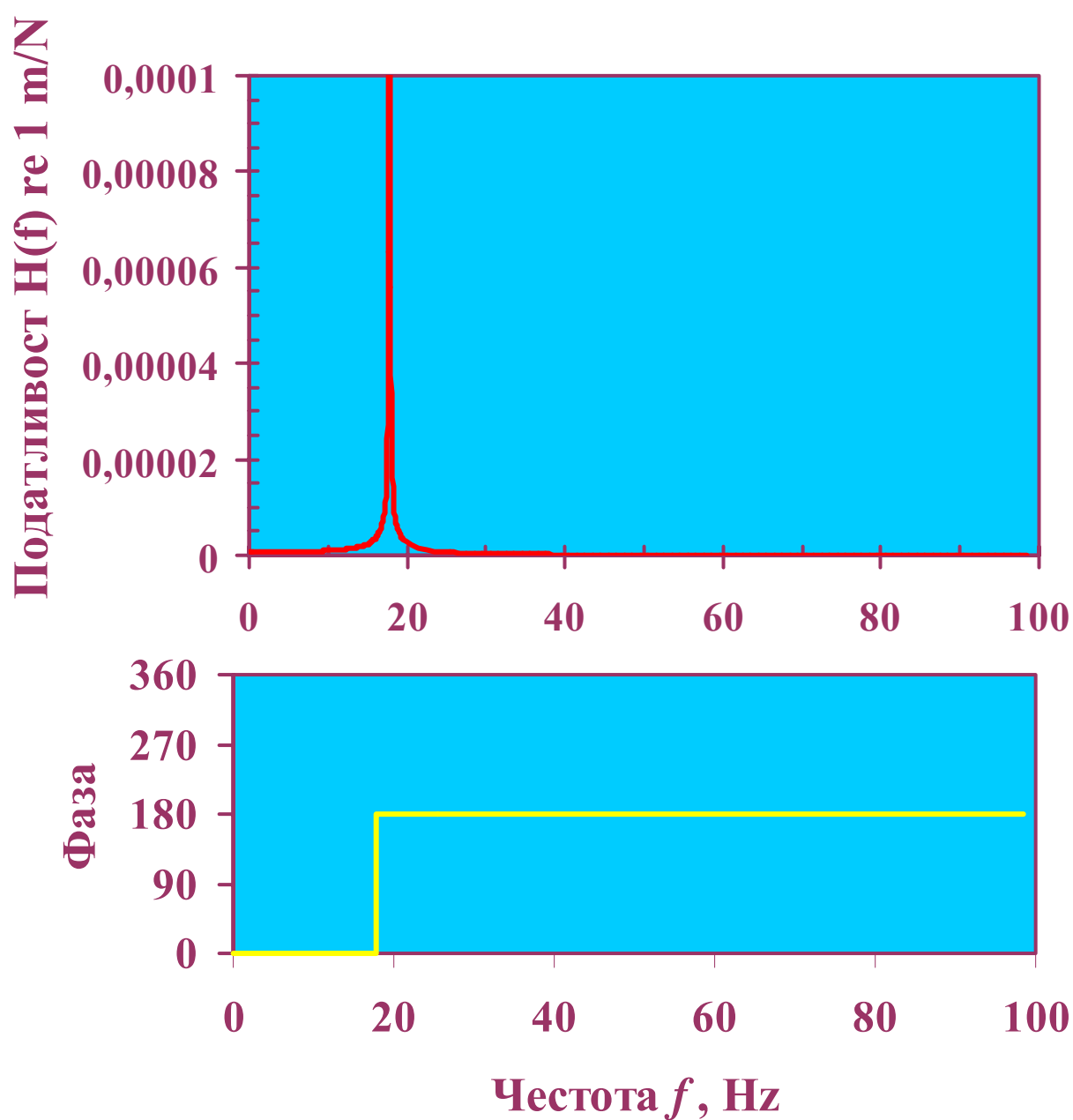
✘ Модул (на честотната функция на отклика) спрямо честотата

или Фаза спрямо честотата тип *Bode* графика (съставена от две графики)

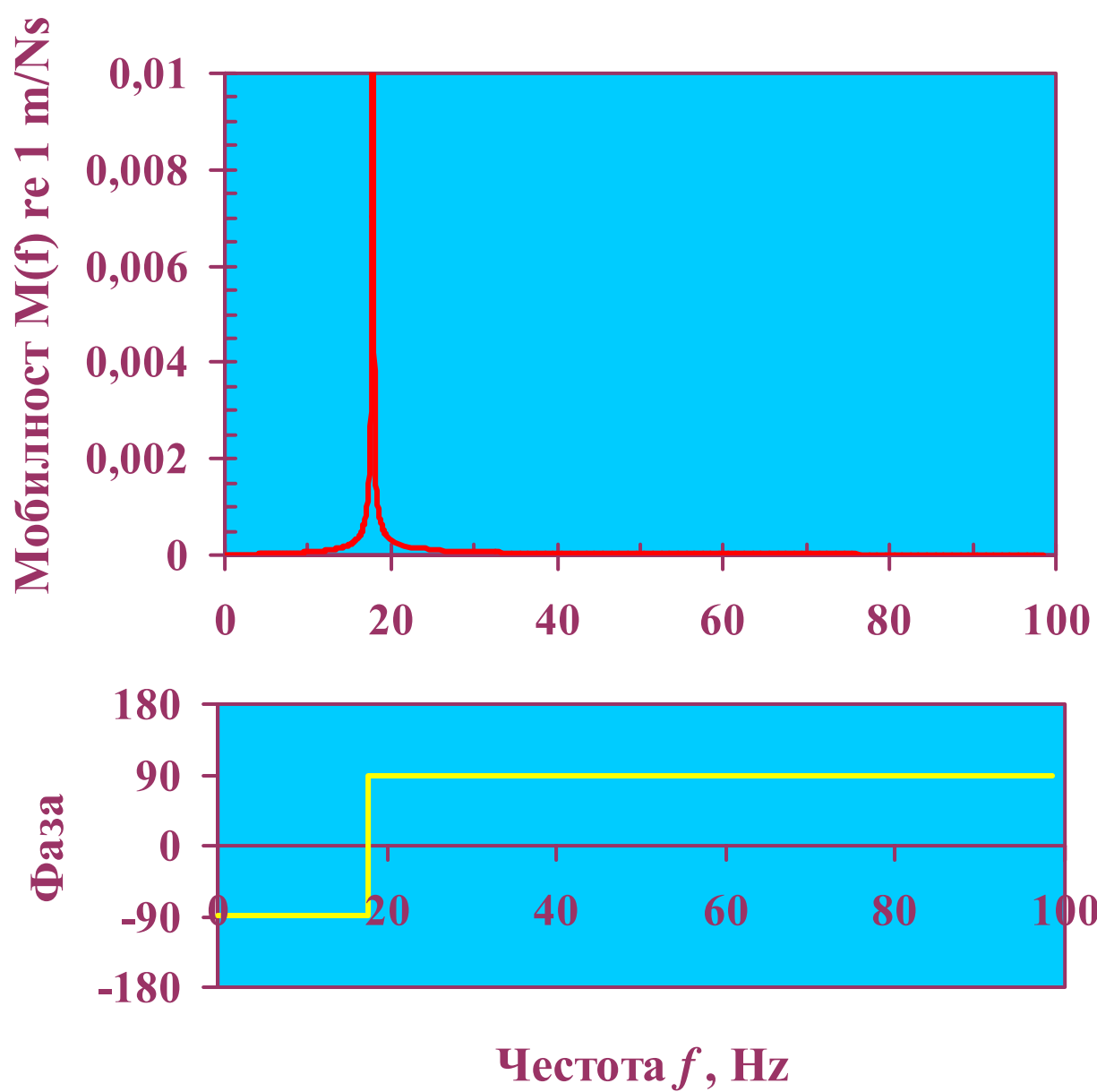
✘ Реална част (на честотната функция на отклика) спрямо честотата

или Имагинерна част спрямо честотата (две графики)

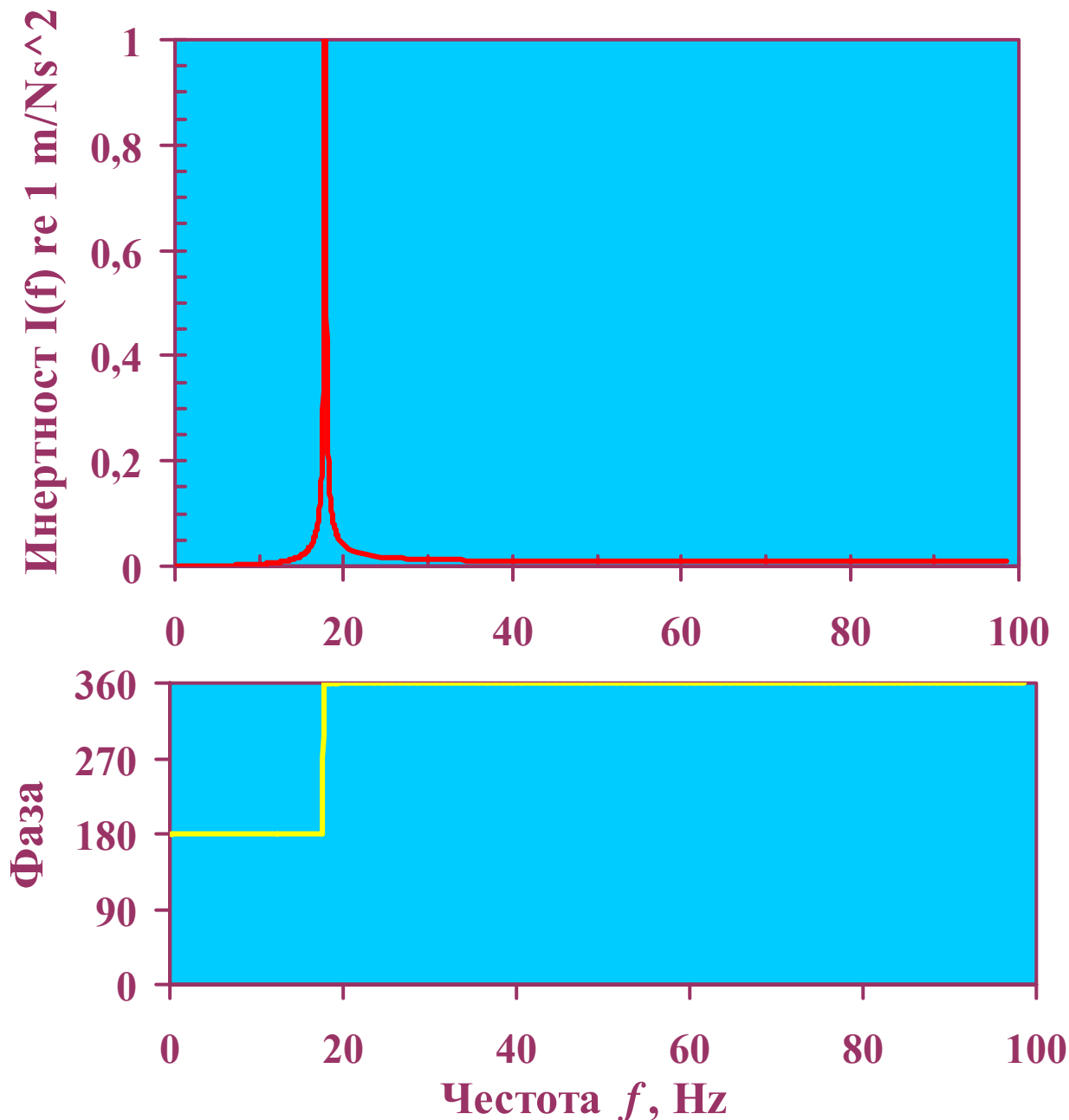
✘ Реална част спрямо имагинерната част (графика на *Nyquist*: една графика, която определено не съдържа информация за честотата)



Фиг. 5 (а) Графика на податливост за недемпфирана система с една степен на свобода



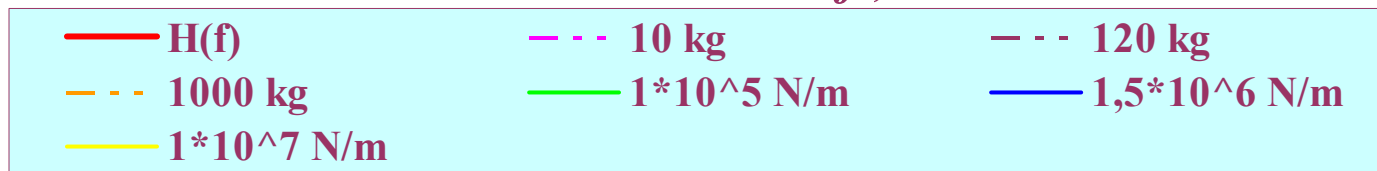
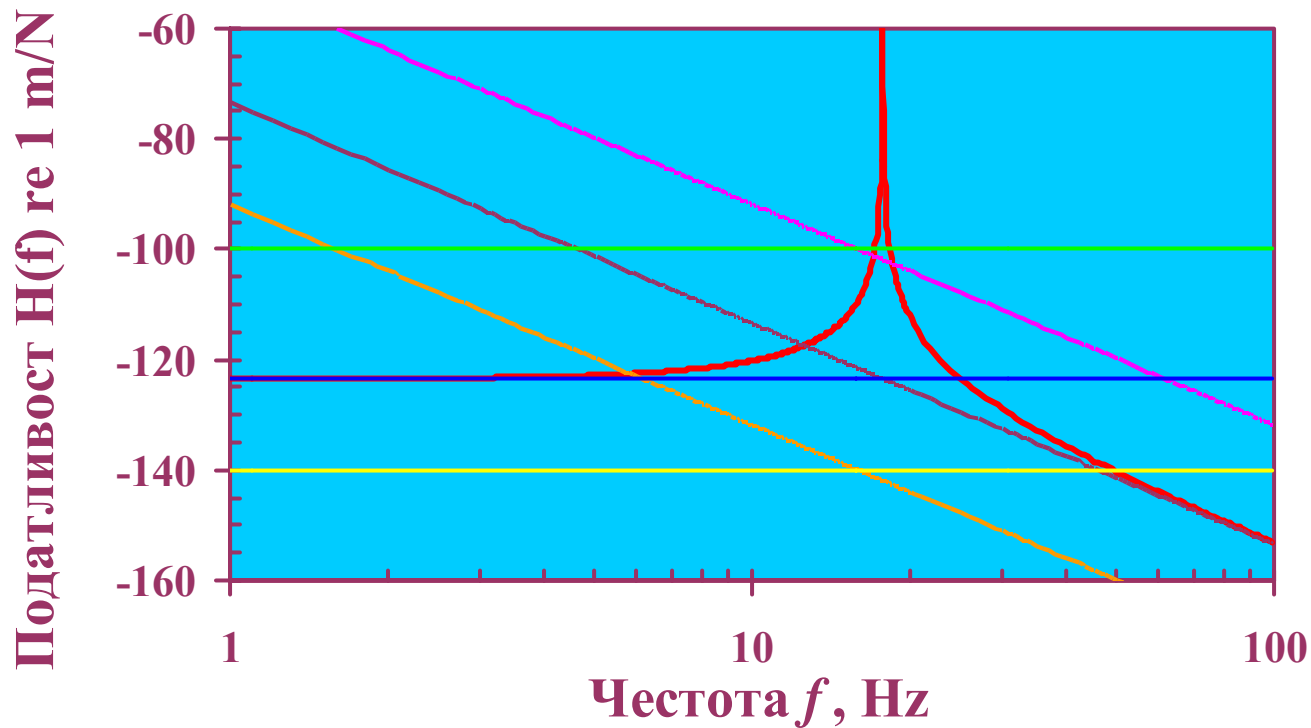
Фиг. 5 (б) Графика на мобилност за недемпфирана система с една степен на свобода



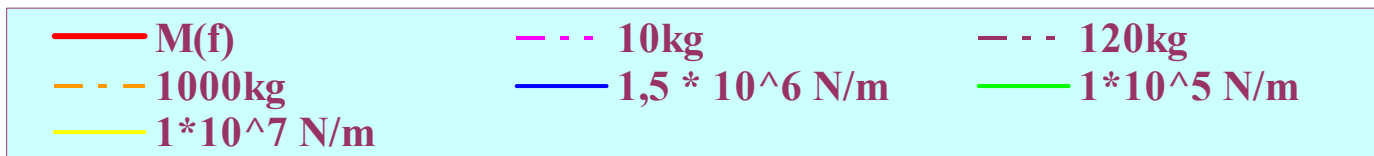
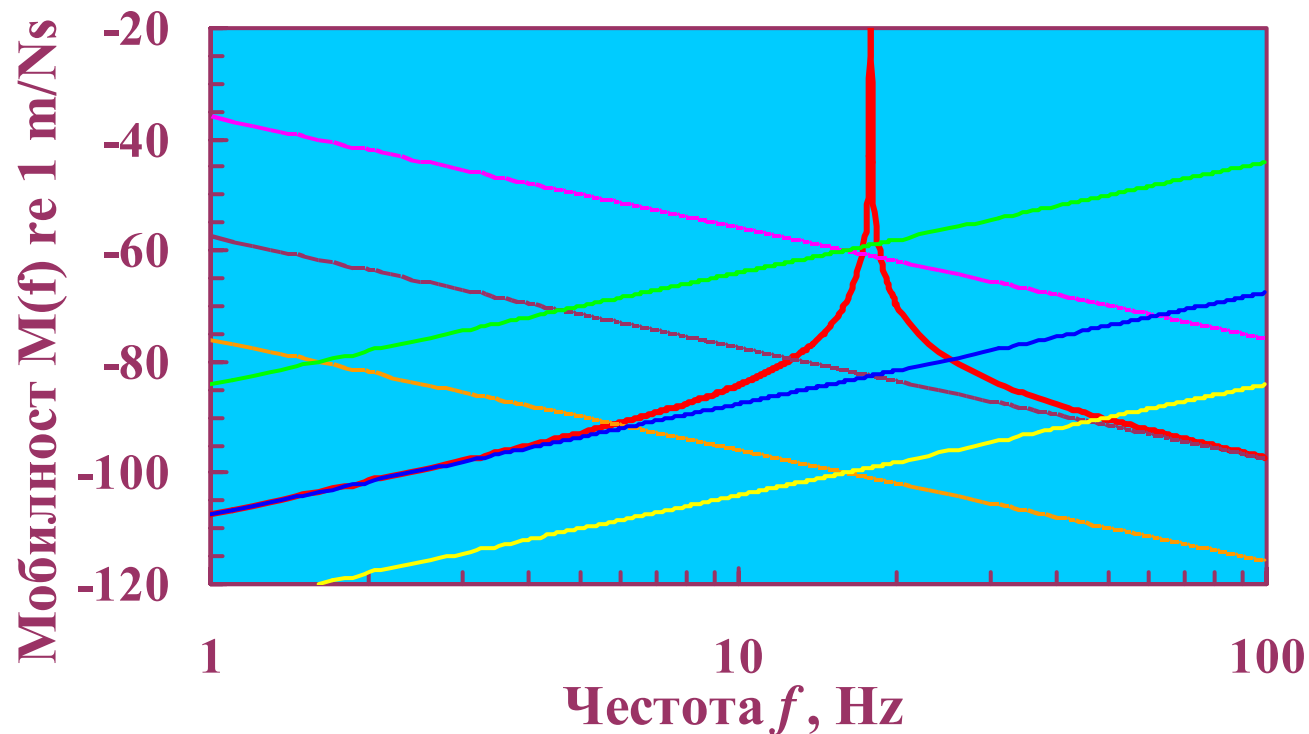
Фиг. 5 (в) Графика на инертност (ускоряемост) за недемпфирана система с една степен на свобода

FRF параметър	маса	коравина
Податливост $H(f)$ $\log H(f) $	$-1/\omega^2 m$ $-\log(m) - 2\log(\omega)$	$1/k$ $-\log(k)$
Мобилност $M(f)$ $\log M(f) $	$-j/\omega m$ $-\log(m) - \log(\omega)$	$j\omega/k$ $\log(\omega) - \log(k)$
Инертност $I(f)$ $\log I(f) $	$1/m$ $-\log(m)$	ω^2/k $2\log(\omega) - \log(k)$

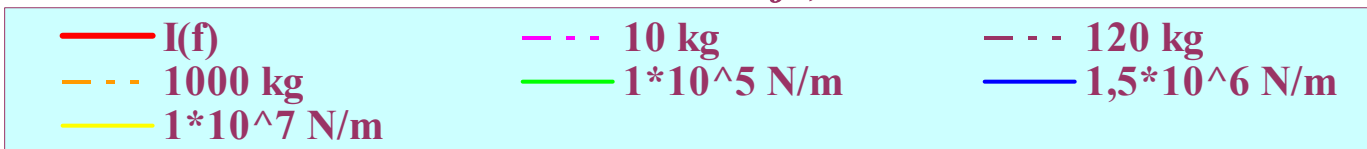
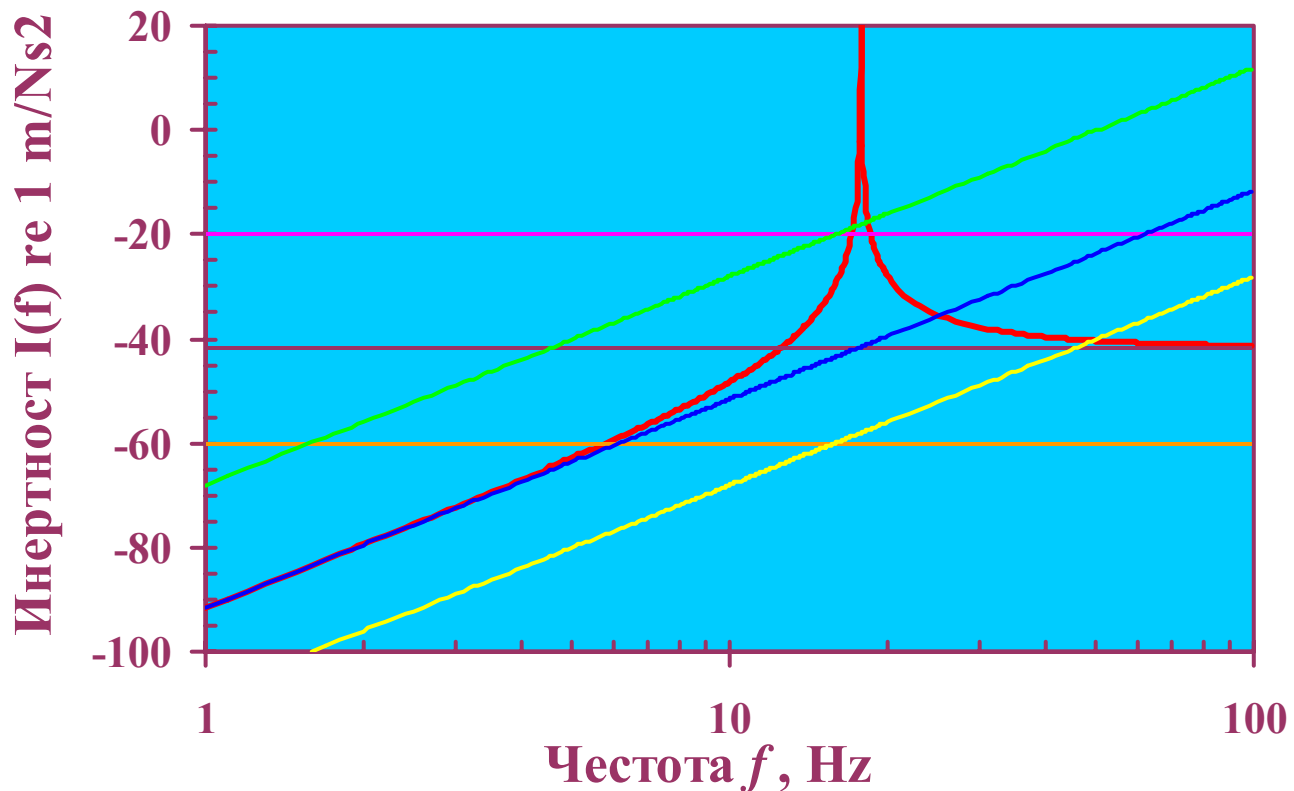
Таблица 2. Варианти на честотен отклик на елементите маса и коравина



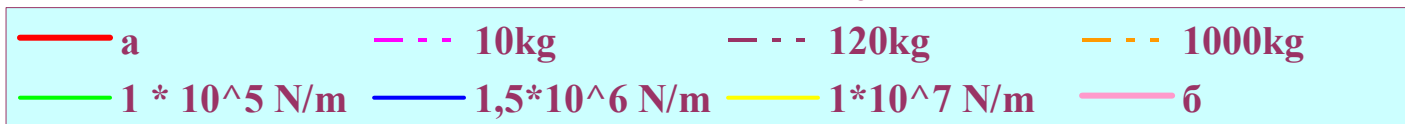
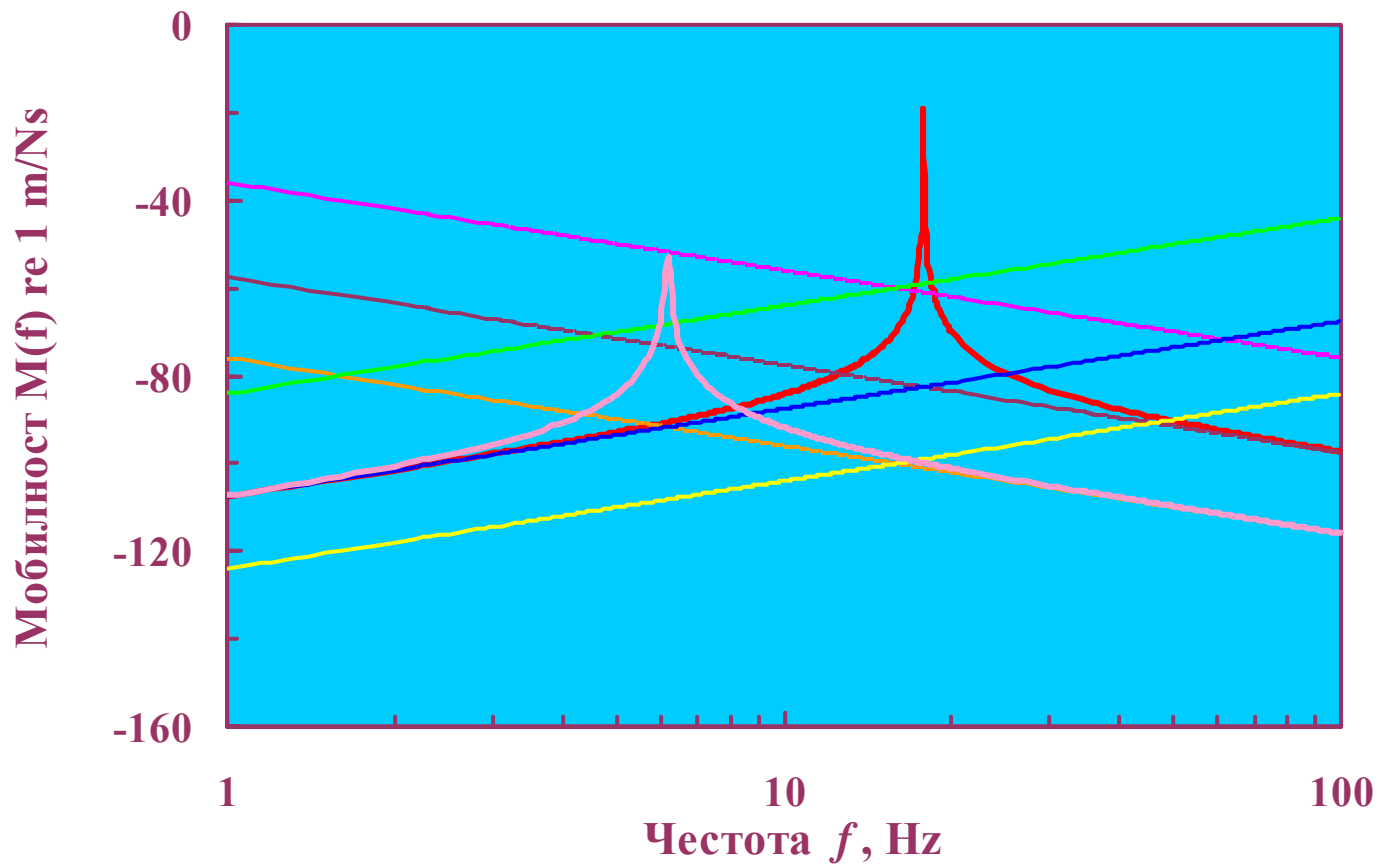
Фиг. 6 (а) Log-log графика на податливост за не демпфирана система с една степен на свобода



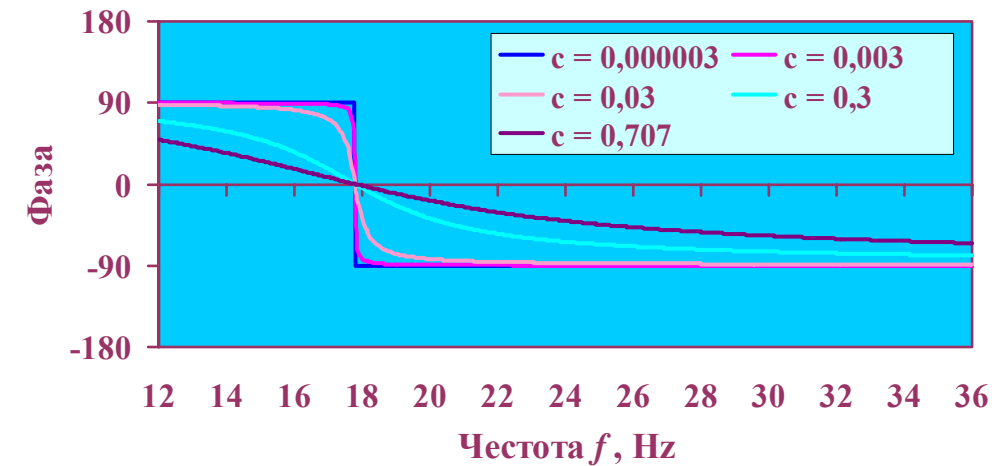
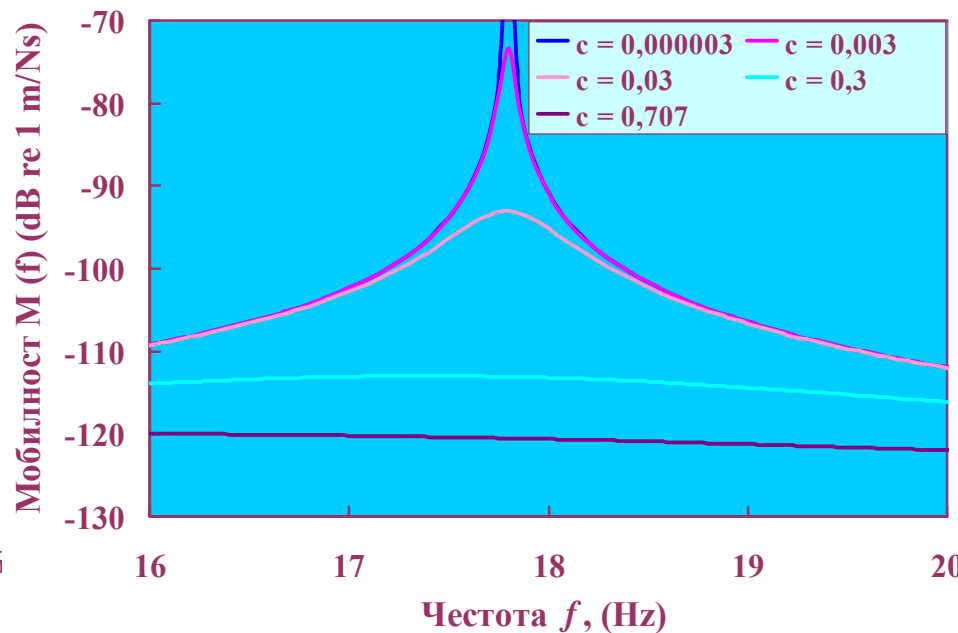
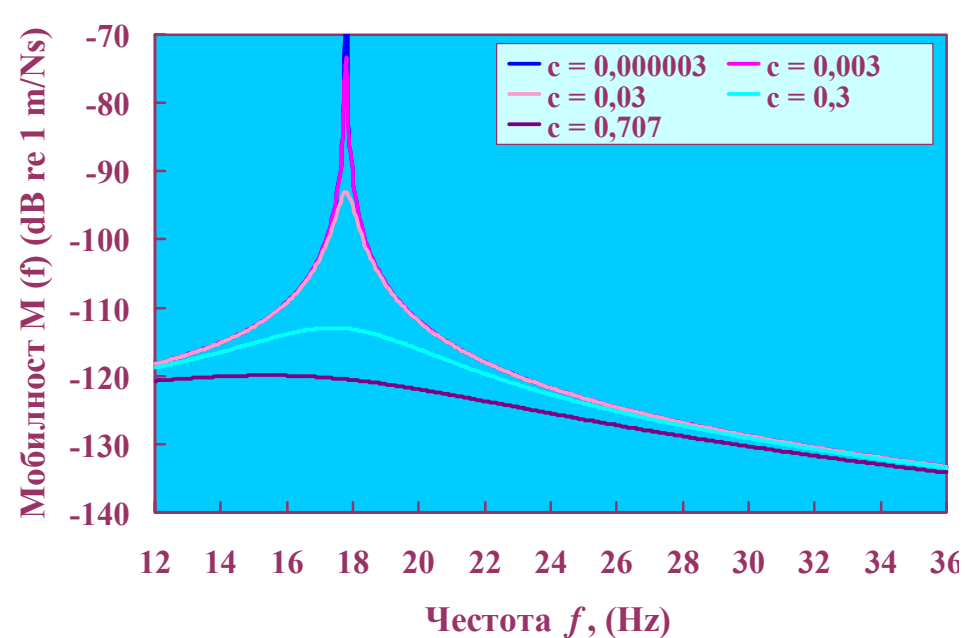
Фиг. 6 (б) Log-log графика на мобилност за недемпфирана система с една степен на свобода



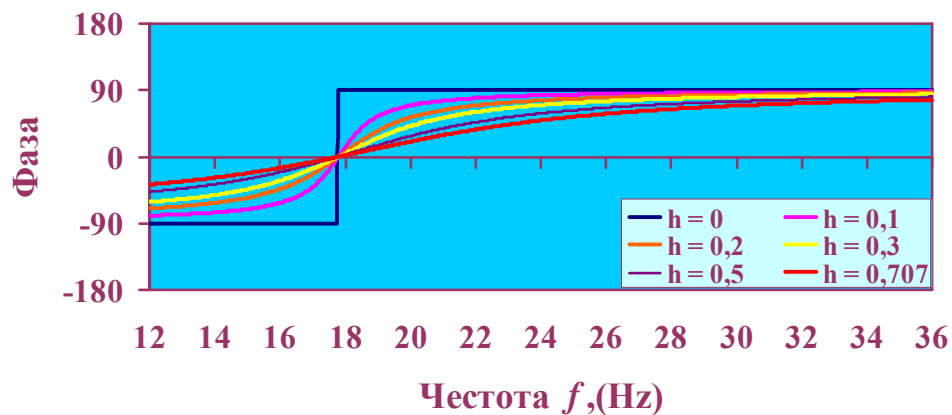
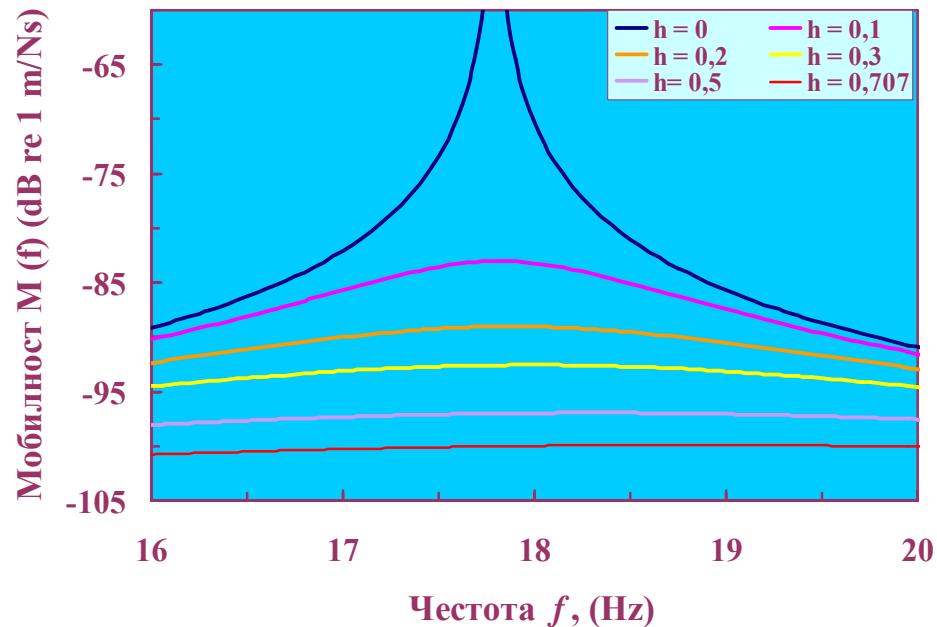
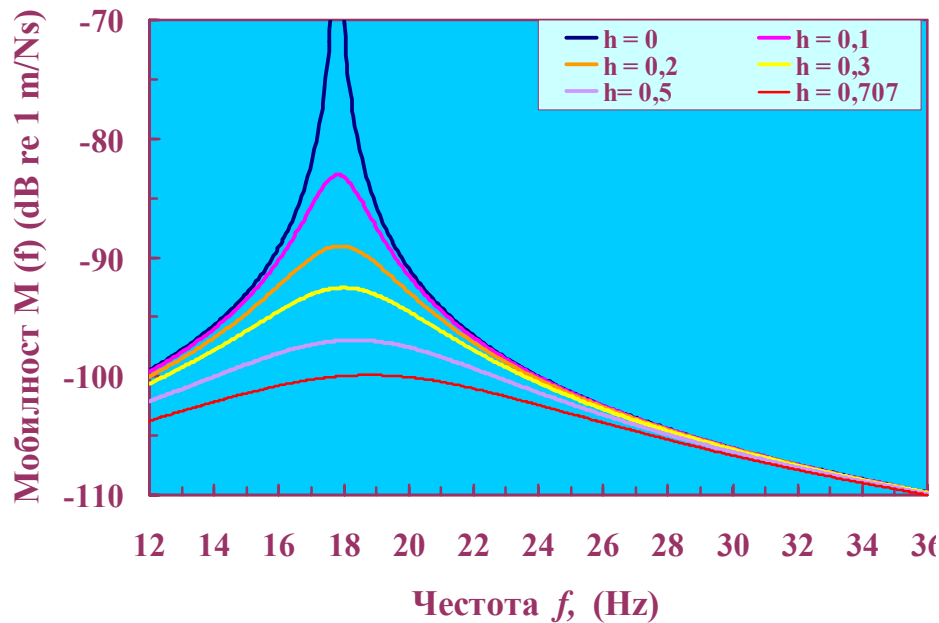
Фиг. 6 (в) Log-log графика на инертност за недемпфирана система с една степен на свобода



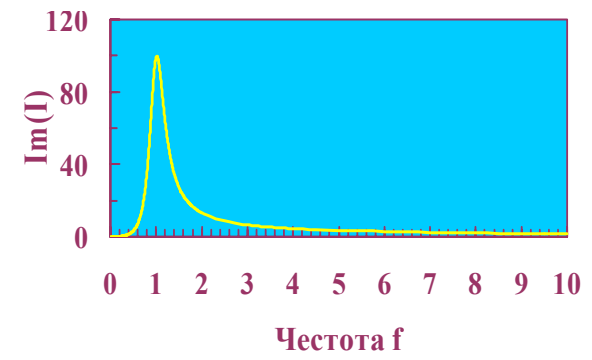
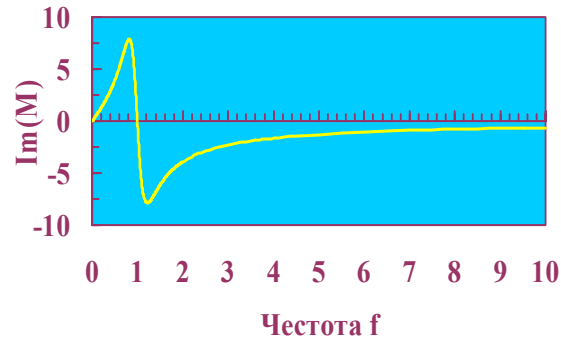
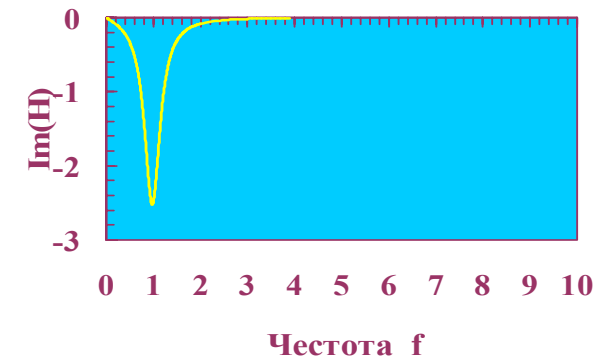
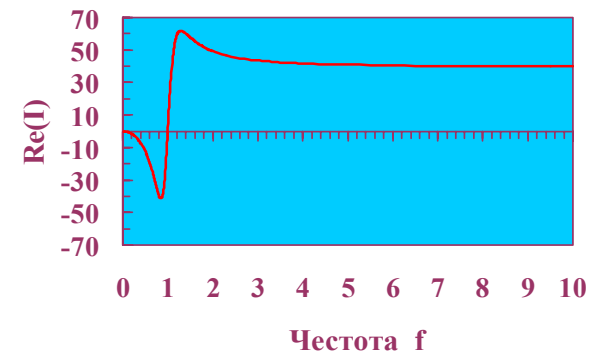
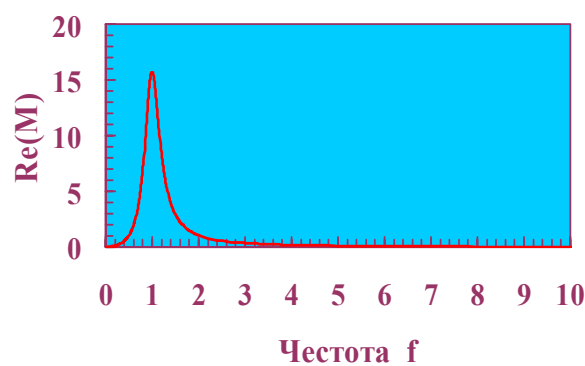
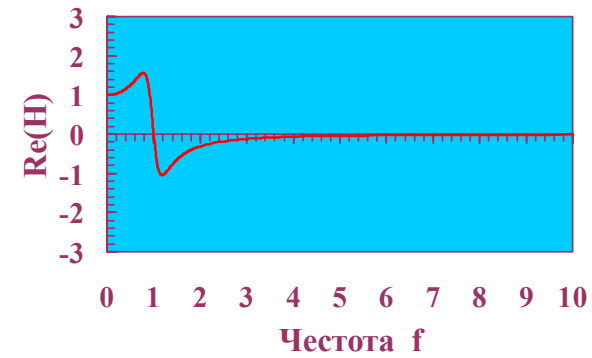
Фиг. 7 Графики на мобилността на система с една степен на свобода с различни стойности за масата и коравината (*a* – $m=120\text{kg}$, $k=1,5 \cdot 10^6 \text{N/m}$; *б* – $m=1000\text{kg}$, $k=1,5 \cdot 10^6 \text{N/m}$)



Фиг.8(а) Графика на мобилността $M(f)$ на вискозно демпфирана система с една степен на свобода с изнесен регион на резонанс и фаза



Фиг.8(б) Графика на мобилността $M(f)$ на хистерезисно демпфирана система с една степен на свобода с изнесен регион на резонанс и фаза



а)

б)

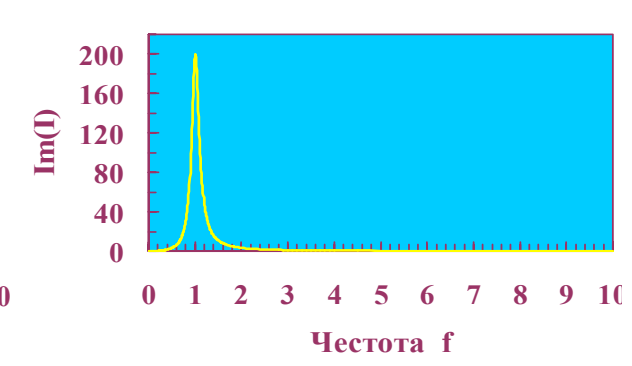
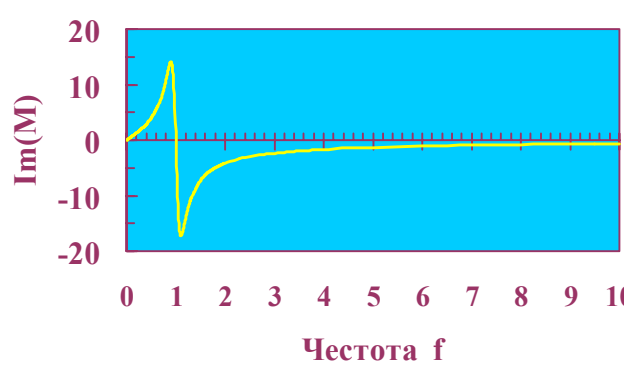
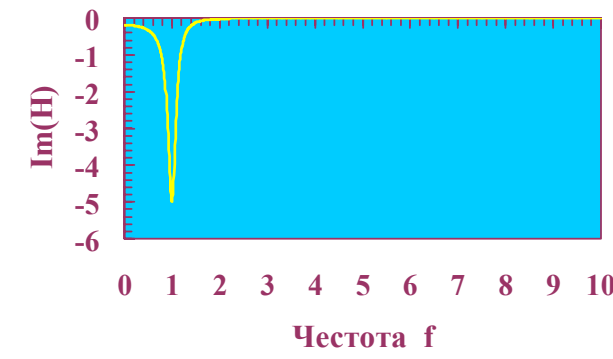
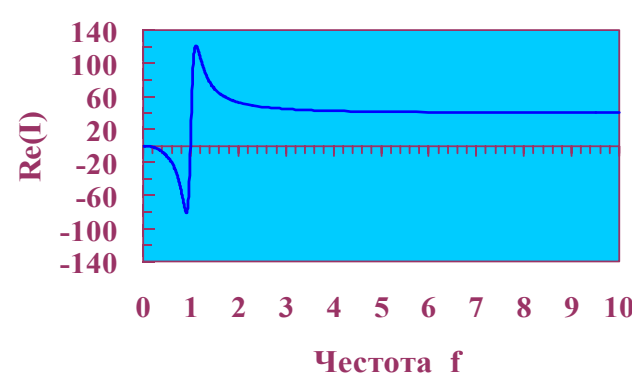
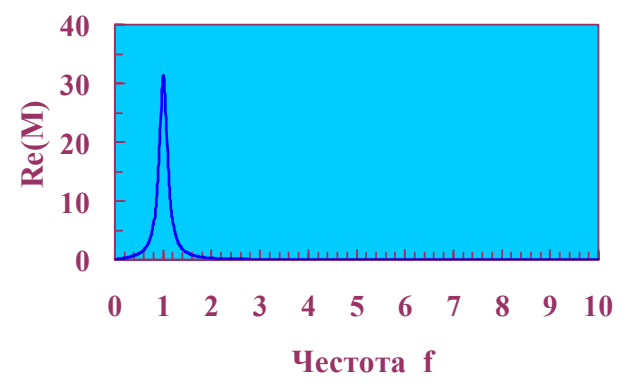
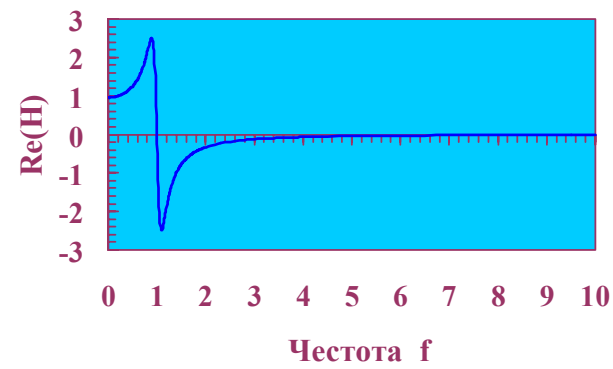
в)

Фиг. 9 Реални и имагинерни части на честотната функция на отклика за вискозно демпфирана система с една степен на свобода

(а) податливост;

(б) мобилност;

(в) инертност.



a)

б)

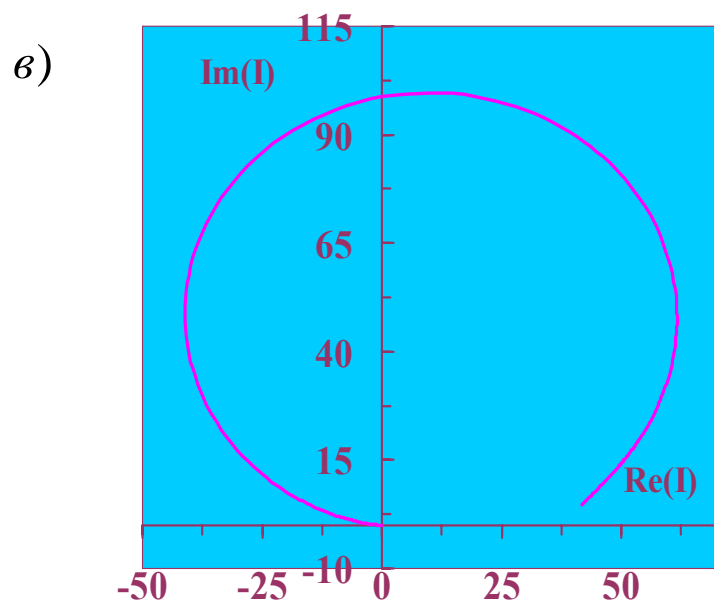
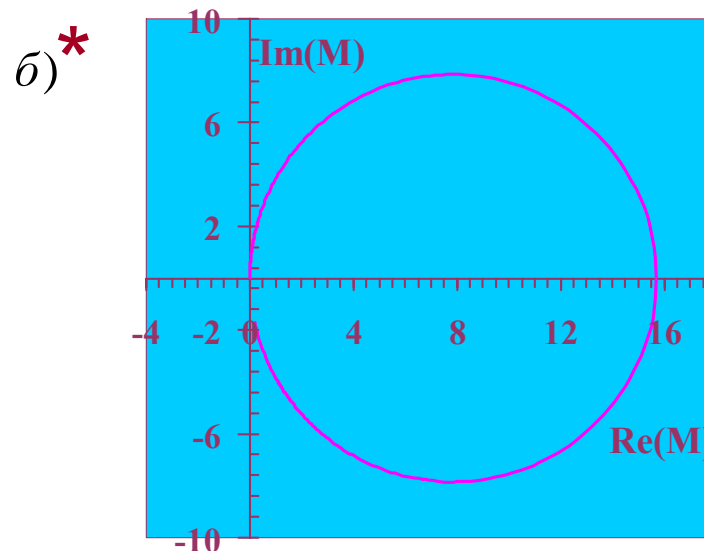
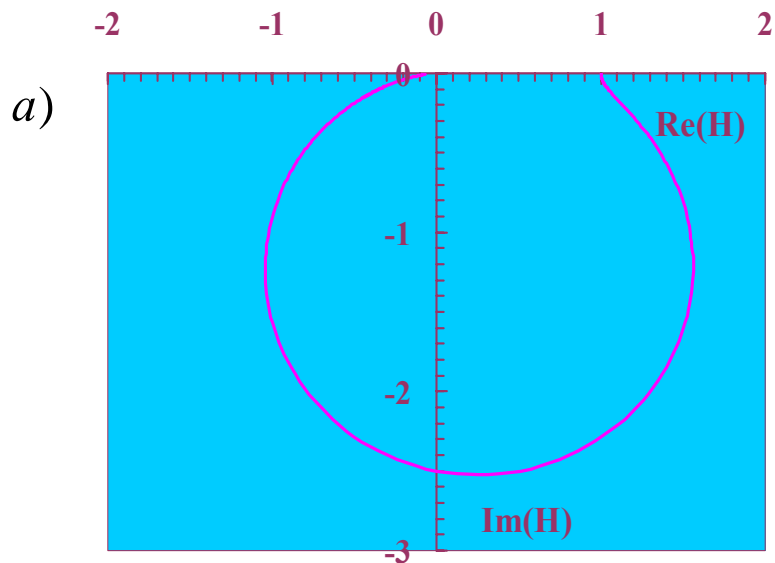
в)

Фиг.10 Реални и имагинерни части на честотната функция на отклика за хистерезисно (структурно) демпфирана система с една степен на свобода

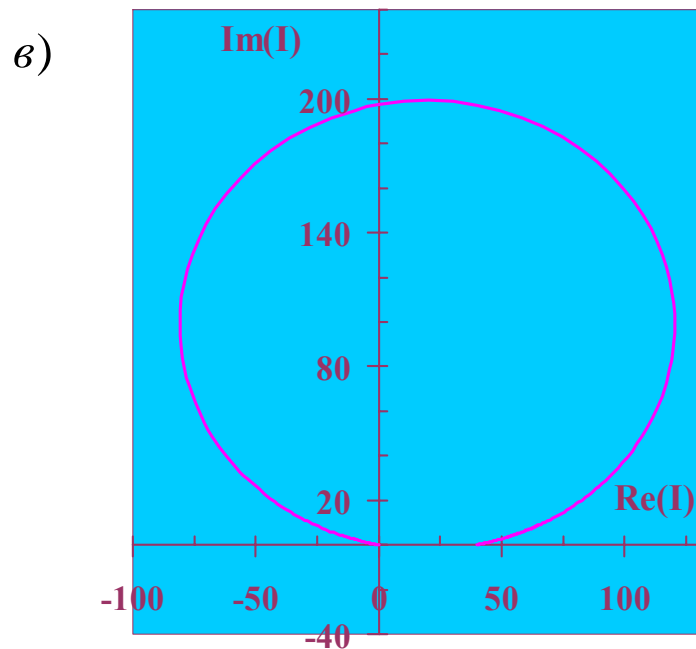
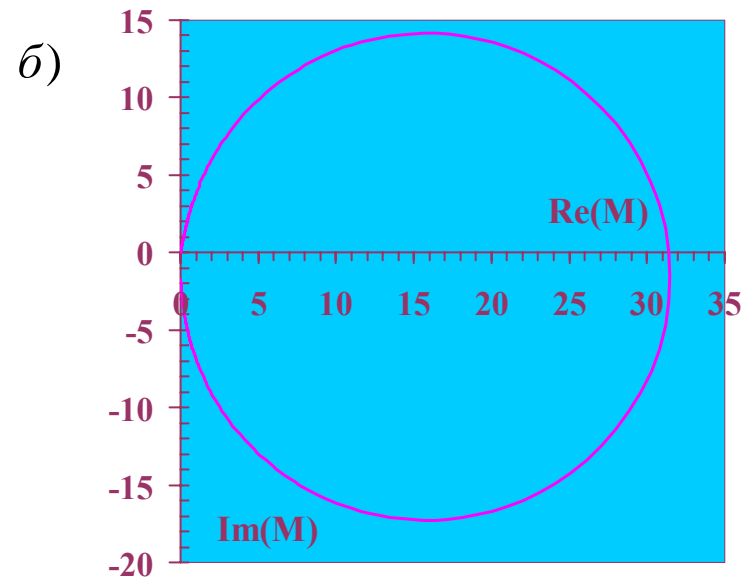
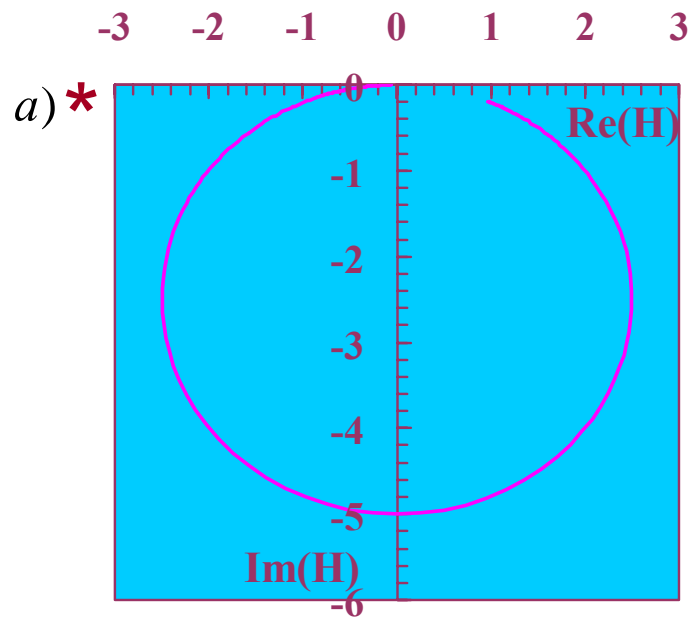
(а) податливост;

(б) мобилност;

(в) инертност.



Фиг. 11 Графики на Nyquist за вискозно демпфирана система с една степен на свобода
 (а) податливост;
 (б) мобилност *;
 (в) инертност.



Фиг.12 Графики на Nyquist за хистерезисно демпфирана система с една степен на свобода
 (а) податливост*;
 (б) мобилност ;
 (в) инертност.

Както се вижда от фиг.11, а също и от придружаващия комплект графики от фиг.12, за хистерезисно (структурно) демпфиране, всяка заема приблизителна форма на окръжност. Фактически, както ще бъде показано по-долу, във всеки комплект графики, една е правилна окръжност (отбелязана с *), докато другите само се доближават до тази форма. За вискозно демпфираната система - това е мобилността $M(f)$, която изчертава точна окръжност, докато за хистерезисния комплект - това е податливостта $H(f)$. В другите случаи степента на изкривяване силно зависи от степента на приложеното демпфиране – ставаща незначителна с намаляване на демпфирането.

Първо е взет случая с вискозното демпфиране.
Известно е, че мобилността е:

$$M(f) = j\omega H(f) = \frac{j\omega}{k - \omega^2 m + j\omega c} = \frac{\omega^2 c + j\omega(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$$

така $\operatorname{Re}(M) = \frac{\omega^2 c}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$ и $\operatorname{Im}(M) = \frac{\omega(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$

Нека $U = \left(\operatorname{Re}(M) - \left(\frac{1}{2c} \right) \right)$ и $V = (\operatorname{Im}(M))$

Тогава $U^2 + V^2 = \frac{\left((k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2 \right)^2}{4c^2 \left((k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2 \right)^2} = \left(\frac{1}{2c} \right)^2$

Следователно на графиката на $\operatorname{Re}(M(f))$ спрямо $\operatorname{Im}(M(f))$ за $\omega = 0 \rightarrow \infty$ ще се изпише окръжност с радиус $1/2c$ и център при $(\operatorname{Re} = 1/2c; \operatorname{Im} = 0)$, както е илюстрирано на фиг. 11б)

За случая с хистерезисното демпфиране има малко различаващи се изрази за честотната функция на отклика:

$$H(f) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + jh} = \frac{(k - \omega^2 m) - j(h)}{(k - \omega^2 m)^2 + (h)^2}$$

Така, че $\operatorname{Re}(H) = \frac{k - \omega^2 m}{(k - \omega^2 m)^2 + (h)^2}$ и $\operatorname{Im}(H) = \frac{h}{(k - \omega^2 m)^2 + (h)^2}$

Макар, че не са същите изрази, както онези по-горе за вискозното демпфиране, възможно е да се види, че:

$$(\operatorname{Re})^2 + \left(\operatorname{Im} + \frac{1}{2h} \right)^2 = \left(\frac{1}{2h} \right)^2$$

доказвайки, че графиката на *Nyquist* на податливост за хистерезисно демпфирана система с една степен на свобода ще образува окръжност с радиус $1/2h$ и център $(\operatorname{Re} = 0; \operatorname{Im} = 1/2h)$, както е показано на фиг. 12 а)